PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

55 Nenne fünf nicht-triviale $\mathbb{Z}$-Untermoduln $M_1, \ldots, M_5$ von $M = \mathbb{Z}^5$ wie folgt:

(a) M_1 ist frei mit direktem Komplement P_1 in M.

(b) M_2 ist frei, besitzt aber kein direktes Komplement in M.

(c) M_3 ist nicht zyklisch, aber in einem freien Untermodul vom Rang 3 enthalten.

(d) M_4 definiert einen freien Faktormodul M/M_4 vom Rang 2.

(e)* M_5 ist echter Untermodul von M, der von fünf Elementen erzeugt werden kann, aber nicht von weniger Elementen.

56^s (a) Es sei $M = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ ein endlich erzeugter R-Modul. Seien weiters a_{ij} Elemente in R, für $1 \leq i < j \leq k$. Setze $y_i = x_i + \sum_{j=i+1}^{k} a_{ij} \cdot x_j$. Zeige, dass M von $y_1, \ldots, y_k$ erzeugt wird.

(b) Es sei $I = \langle f_1(x,y), \ldots, f_k(x,y), y - g(x) \rangle$ ein Ideal von $K[x,y]$. Zeige, dass

$$I = \langle f_1(x, g(x)), \ldots, f_k(x, g(x)), y - g(x) \rangle.$$

Illustriere an einem Beispiel.

(c) Zeige, dass durch $\varphi : K[x,y] \to K[x,y],\ x \to x,\ y \to y + g(x)$ für jedes $g \in K[x]$ ein Ringisomorphismus definiert wird.

(d) Bestimme $\varphi(I)$ mit I wie in (b).

57 (a) Zeige, dass $M = \mathbb{F}_p[t^3, t^4, t^5]$ in natürlicher Weise $\mathbb{F}_p[t]$-Modul ist.

(b) Bestimme eine freie Auflösung von M.

58 (a) Beweise die Isomorphie $L_1/(L_1 \cap L_2) \cong (L_1 + L_2)/L_2$ für Untermoduln $L_1, L_2 \subseteq M$.

(b) Es sei P ein Untermodul eines Moduls M, und $N = M/P$. Zeige, dass die Folge

$$0 \to P \to M \to N \to 0$$

exakt ist.

(c)* Finde jeweils ein Beispiel, in der die Folge aus (b) spaltet, bzw. nicht spaltet.

59 Es sei $Q \in R = \mathbb{Q}[y_1, \ldots, y_m]$ ein Polynom, das bezüglich y_m normiert sei, und I das von Q erzeugte Ideal von R. Zeige, dass R/I ein endlich erzeugter, freier R'-Modul ist, mit $R' = \mathbb{Q}[y_1, \ldots, y_{m-1}]$

60 Zeige: Ein R-Modul M ist noethersch genau dann, wenn jede aufsteigende Folge von Untermoduln stationär wird, bzw., wenn jede nicht-leere Menge von Untermoduln ein maximales Element besitzt.